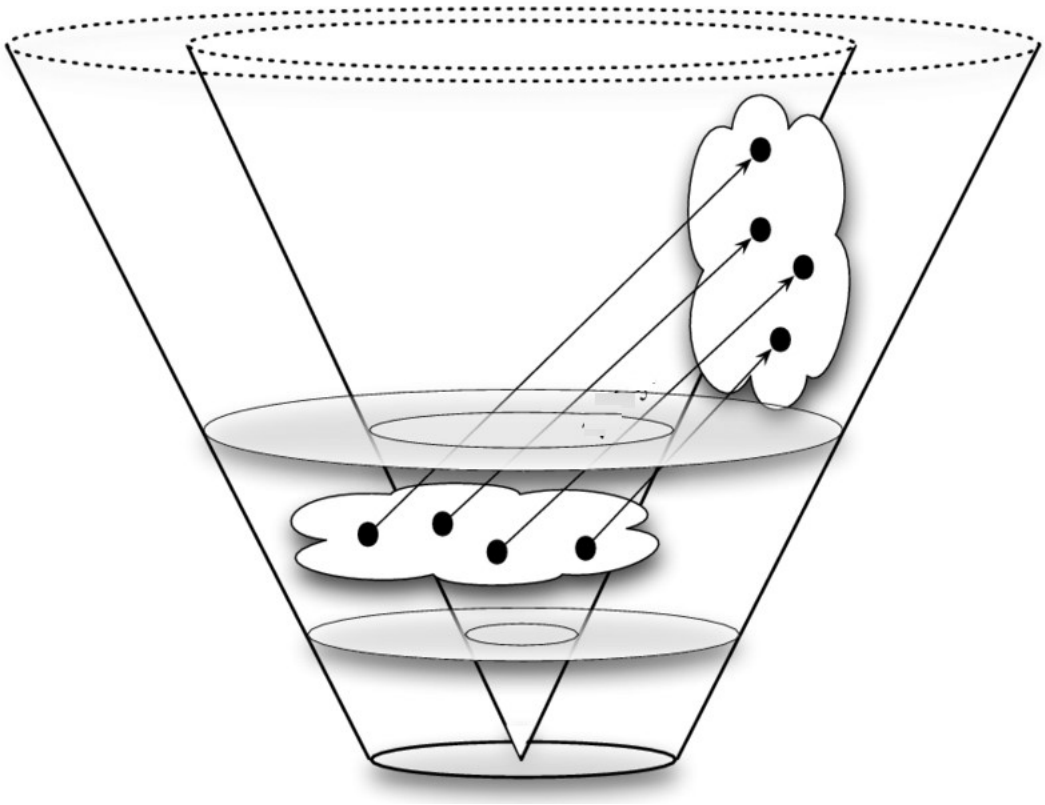
شناخت ما از مجموعه‌ها



ناصر بروجردیان

مجموعه‌ها در عین سادگی مفهوم، نقشی زیربنایی در ریاضیات امروزین بازی می‌کنند.

چرا در طول تاریخ ریاضی، مفهوم مجموعه در صد و پنجاه سال اخیر مطرح شده است و مورد توجه واقع شده است؟ چرا تا قبل از این کسی متوجه این مفهوم و اهمیت آن نبوده است؟

نکتهٔ اساسی در تاریخ ریاضی آن است که هر مفهومی در صورت نیاز به وجود می‌آید. مفاهیم غیرضروری زائد محسوب می‌شوند.

آیا برای سخن گفتن از اعداد لازم است موجودیتی برای مجموعهٔ آنها قائل شویم؟

تا قبل از نیاز به مفهوم تابع، نیازی به حضور مجموعه‌ها نبود.

از لحاظ تاریخی، نیاز به قبول تابع به عنوان موجودی جدید و مهم در ریاضی، حضور مجموعه‌ها را به عنوان اشیایی جدید و مهم در ریاضی ضروری ساخت.

روند پیدایش توابع از زمان به وجود آمدن حساب دیفرانسیل و انتگرال تا رسیدن به مفهوم دقیق تابع ۳۰۰ سال طول کشید.

دقت تعریف تابع به عنوان اشیای جدید از طریق وجود موجودات جدیدی به اسم مجموعه قابل انجام شد.

استفاده جدی از مجموعه‌ها، وقتی رخ می‌دهد که آنها را به عنوان اشیاء و موجودات جدیدی می‌پذیریم که قابلیت آنرا دارند که در مورد آنها سخن بگوییم.

آیا حق داریم برای دسته‌ای از اشیاء معین موجودیت جدیدی قائل شویم و آنرا به عنوان یک شیئ جدید بپذیریم؟

شیء در نظر گرفتن دسته‌ای از اشیاء، یک عمل ذهنی است و ما مجاز هستیم به هر طریقی که خواستیم اشیاء جدیدی معرفی کنیم. تنها شرط، داشتن قدرت تمیز بین آنها است.

این توانایی، مانند قدرت خلق کردن می‌ماند و توانایی خلق اشیاء ذهنی برای ما قرار داده شده است. این توانایی بخشی از توانایی عقلی ما است که موجب پیدایش ریاضیات می‌شود.

سوال: اگر مجموعه‌ها با عمل خلق ذهنی ما ساخته می‌شوند، آیا یک مجموعه وقتی به وجود می‌آید که توسط یک فردی تعریف شده باشد و به آن اشاره شده باشد؟ مانند یک مجسمه‌سازی که فقط وقتی مجسمه‌هایی را ساخته باشد، می‌توانیم بگوییم این مجسمه-ها وجود دارند و فقط راجع به آنها می‌توانیم سخن بگوییم.

این نگرش مطلوب نیست. موجودات مورد بحث در ریاضی نباید وابسته به ذهن افراد باشند.

می‌توانیم مجموعه‌ها را به عنوان اشیایی ببینیم که امکان تعریف شدن و به وجود آمدن دارند. در واقع با جهانی از امکانات روبرو هستیم که با تعریف و توجه به هر کدام از آنها، در ذهن خود به آنها موجودیت می‌بخشیم. در واقع، موجودی که امکان وجود داشته است را خلق کرده‌ایم.

اما، اگر مجموعه‌ها را از پیش موجود بدانیم، عمل ذهنی ما منجر به خلق یا ایجاد آنها نمی‌شود، بلکه باید بگوییم مجموعه‌ها را کشف می‌کنیم. این نگرش را افلاطون‌گرایی در ریاضی می‌نامند.

یک درجه پایینتر از افلاطون‌گرایی آن است که مجموعه‌ها را به صورت موجوداتی ممکن بدانیم که وجود واقعی ندارند ولی با تعریف و توجه ما به آنها به صورت اشیاء ذهنی

جدید موجودیت می‌یابند. در این نگرش، این اشیاء جدید کشف نمی‌شوند، بلکه خلق می‌شوند. این نگرش را مناسب است نگرش **امکانی** به مجموعه‌ها بنامیم.

در نگرش افلاطون‌گرایی ما با جهان مجموعه‌ها به عنوان یک جهان از موجودات واقعی ذهنی سر و کار داریم و در نگرش امکانی، با یک جهان از مجموعه‌های ممکن سر و کار داریم که تعهدی به واقعیت پیشینی مجموعه‌های ممکن نداده‌ایم.

در عمل واقعی ریاضی، برای ریاضیدانان حرفه‌ای، فرق چندانی بین این دو نگرش وجود ندارد. اگرچه از لحاظ نگرش فلسفی خیلی با هم فرق دارند.

در هر دو نگرش، ما دسترسی خاصی نه به مجموعه‌های جهان افلاطونی مجموعه‌ها داریم و نه به جهان مجموعه‌های ممکن دسترسی داریم. اما اطلاعاتی عمومی از آنها را در اختیار داریم که بر اساس آنها با مجموعه‌ها کار می‌کنیم.

سوال: نقش نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها چیست و رابطهٔ آن با جهان افلاطونی مجموعه‌ها یا جهان مجموعه‌های ممکن چیست؟

ظهور نظریه‌های اصل موضوعی مجموعه‌ها به دلیل دقت بخشیدن به فهم ما از مجموعه-ها و رفع پارادکس‌هایی بود که در مجموعه‌ها به وجود آمده بود.

به دلیل درک ناقص ما از جهان مجموعه‌ها و در دسترس نبودن این جهان برای ذهن ما، تصورات نادرستی نسبت به مجموعه‌ها در ذهن دانشمندان پیش آمده بود که منجر به پارادکس می‌شد. معین کردن حدود و ثغور اطلاعات و تصورات ما نسبت به مجموعه‌ها در نظریه‌های اصل موضوعی مجموعه‌ها انجام می‌شود تا مانع بروز پارادکس‌ها شود.

آیا نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها مشکلات ما در درک و فهم مجموعه‌ها را حل می-کند؟

سوال: در نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، جهان مجموعه‌های افلاطونی معتبر است یا جهان مجموعه‌های ممکن؟ یا به هیچکدام از این دو نگرش، نیازی نیست و اصلا لازم نیست در این مورد بحثی شود و خود به خود این مسئله حل می‌شود؟

نکته مهم: نظریات اصل موضوعی به وجود آورندهٔ هیچ چیزی نیستند.

جملهٔ معروفی در ریاضی هست که می‌گوید تعریف کردن چیزی را به وجود نمی‌آورد. (با تعریف اشیاء ذهنی اشتباه نشود) مثلا ما می‌توانیم بگوییم اسب شاخدار چگونه موجودی است، اما چنین تعریفی باعث نمی‌شود اسب شاخداری در جهان ایجاد شود.

نظریات اصل موضوعی فقط توصیف کنندهٔ یک موقعیت یا ساختار هستند. چنین توصیفاتی موجب نمی‌شود که اصلا چنین موقعیتی به طور واقعی رخ دهد یا ساختار توصیف شده، نمونه یا مدلی داشته باشد.

مثلا نظریه اصل موضوعهٔ اعداد حقیقی توصیف کنندهٔ موجوداتی است که آنها را اعداد حقیقی می‌نامیم. ولی این توصیفات موجب نمی‌شوند اعداد حقیقی به وجود آیند، بلکه از طریق موجودات ذهنی که از طریق مجموعه‌ها می‌سازیم باید بتوانیم نمونه‌ای از این موجودات که ساختار اعداد حقیقی را دارند ارائه کنیم.

نتیجه: نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، نه مجموعه‌ای به وجود می‌آورد و نه نسبت به جهان افلاطونی مجموعه‌ها و نه نسبت به جهان مجموعه‌های ممکن نظری بیان می‌کند.

سوال: پس، نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها چه کاری انجام می‌دهد و چه مشکلی در مجموعه‌ها را حل می‌کند؟

نقش نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، مشخص کردن اطلاعات بنیادین ما نسبت به مجموعه‌ها است. ما یک درک شهودی نسبت به موجودیت مجموعه‌ها در جهان مجموعه‌های ممکن یا جهان افلاطونی مجموعه‌ها داریم و لازم است این درک خود را به

صورت فهرستی از اطلاعات بنیادین مشخص کنیم. این اطلاعات بنیادی همان اصول موضوعهٔ این نظریات اصل موضوعی مجموعه‌ها هستند.

تفاوت‌هایی که در این دو نگرش است، ممکن است تفاوت‌هایی در نظریهٔ اصل موضوعی مورد پذیرش ایجاد کند.

برای مثال، اصل تعریف‌پذیری گودل برای مجموعه‌ها، برای جهان مجموعه‌های ممکن، قابل قبول است، زیرا به وجود آمدن یک مجموعه در ذهن منوط به تعریف شدن آن است. اما این اصل در جهان افلاطونی مجموعه‌ها مورد پذیرش نخواهد بود، زیرا وجود و پذیرش یک مجموعه ارتباطی با تعریف شدنش ندارد.

نظریه اصل موضوعی مورد قبول برای جهان مجموعه‌های ممکن همان نظریه اصل موضوعی ZF به همراه اصل تعریف‌پذیری گودل است.

اصل انتخاب و اصل پیوستار از طریق اصل تعریف‌پذیری قابل اثبات هستند، بنابراین در جهان مجموعه‌های ممکن خود به خود اصل انتخاب و اصل پیوستار برقرارند.

سوال: با این توصیفات، شناخت ما از مجموعه‌ها چقدر است و بر چه اساسی استوار است؟

در نگرش جهان مجموعه‌های ممکن، ما خالق مجموعه‌ها هستیم و هر گونه تعریفی از یک مجموعه، آنرا برای ما به وجود می‌آورد و شناخت ما از آن، همان تعریفی است که از آن مجموعه داریم و بعدا با یافتن خواص بیشتر، ممکن است شناخت بیشتری نسبت به آن پیدا کنیم.

در این نگرش، ما شناخت خاصی از کل مجموعه‌های ممکن نداریم و فقط در حد همان اصول موضوعه از کل جهان مجموعه‌های ممکن اطلاع داریم.

در نگرش افلاطونی به مجموعه‌ها، ما هیچگونه دسترسی خاصی به مجموعه‌ها، خارج از همان تعریف کردن مجموعه‌ها نداریم و در نتیجه اطلاعات ما نسبت به جهان افلاطونی مجموعه‌ها بیشتر از حالت مجموعه‌های ممکن نیست و حتی کمتر است. چون، مجموعه-های جهان افلاطونی مجموعه‌ها لزوما با تعریف به وجود نمی‌آیند و از این لحاظ، اطلاعات ما نسبت به آنها کمتر است.

سوال: آیا نمی‌شود فقط در داخل نظریات اصل موضوعی مجموعه‌ها بمانیم و کاری به جهان افلاطونی مجموعه‌ها یا جهان مجموعه‌های ممکن نداشته باشیم؟

نظریات اصل موضوعی، صرفاً نظریاتی صوری در یک زبان منطقی صوری هستند. باقی ماندن در نظریات اصل موضوعی همان دیدگاه مکتب صورتگرایی هیلبرت است که ریاضی را فقط کار در یک دستگاه صوری می‌داند که مشغول ساختن فرمول‌های صوری و استخراج آنها از فرمول‌های دیگر، طبق قواعد استنتاج آن دستگاه صوری است. به قول معروف، در مکتب صورتگرایی، ریاضی فقط بازی با نمادها است.

نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها صرفاً یک دستگاه صوری است و ماندن در این دستگاه به معنای آن است که ریاضیدانان فقط مشغول یک بازی مخصوص به خود هستند.

اما، در عمل نه ریاضیات صرفا یک بازی با نمادها است و نه ریاضیدانان چنین تصوری از کار خود دارند. ریاضیدانان پشت سر فرمول‌هایی که به کار می‌برند شهودی دارند و معنایی برای یافته‌های خود قائلند که همان یافتن حقایقی از جهان افلاطونی مجموعه‌ها یا جهان مجموعه‌های ممکن است.

به دلیل چنین مشکلاتی، یک شوخی فلسفی در بارهٔ ریاضیدانان مطرح است که می-گویند ریاضیدانان به هنگام کار ریاضی، افلاطون‌گرا هستند ولی به هنگام ارائه یافته-های خود صورتگرا هستند. یعنی خودشان هم نمی‌دانند چه کاری انجام می‌دهند!!

ریاضیات دو جزء مهم دارد. ساختارها که همان نظریه‌های اصل موضوعی در زبان‌های صوری منطقی هستند و مدل‌ها که همان معنابخشی به ساختارها هستند که توسط مجموعه‌ها در جهان افلاطونی مجموعه‌ها یا جهان مجموعه‌های ممکن انجام می‌شود.

تفاوت نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها و جهان مجموعه‌ها همان تفاوت یک نظریهٔ صوری و مدل‌های آن است. بدون مدل، نظریهٔ صوری فقط یک دستگاه صوری است که برای مکتب صورتگرایی ارزشمند است.

نظریات صوری و زبان‌های منطقی صوری بسیار ارزشمند هستند، زیرا این دستگاه‌ها با دقت تمام، قابل ساخته شدن هستند و کار با این دستگاه‌ها بدون هیچ ابهامی قابل تعریف هستند و عملا ریاضیدانان فرمول‌های این دستگاه‌ها را با هم تبادل می‌کنند و نه هیچ چیز دیگر را. بنابراین، صورتگرایی را دست کم نگیرید.

اما، معنای این دستگاه‌های صوری در ذهن ریاضیدانان است و روی کاغذ قابل نشان دادن نیست. جهان مجموعه‌ها، مفهومی در ذهن ریاضیدانان است، اما آنچه ریاضیدانان تولید می‌کنند همگی مطالبی است که در این دستگاه‌ها بیان می‌شوند. بنابراین، در عمل ما چیزی جز فرآورده‌های این دستگاه‌های صوری را در اختیار نداریم.

ساختارها، جزء مهمی از ریاضی هستند، که آنرا ریاضیات ساختارها می‌نامیم. برای کار در ریاضیات ساختارها ما نیازمند حداقلی از موجودات ذهنی هستیم که مکتب شهودگرایی ریاضی آنها برای ما فراهم می‌کند. این حداقل‌ها مانند نمادها و سرهم کردن نمادها و آلگوریتم‌ها هستند که حداقل اشیاء ریاضی مورد نیاز هستند که آنها را ریاضیات زمینه می‌نامیم.

ریاضیات زمینه در مکتب شهودگرایی بسیار محدود و سخت‌گیرانه است. در این مکتب هر شیئی حتما توسط یک آلگوریتم باید ساخته شود، اگرنه موجودیتی ندارد. در این

مکتب نیازی به مفهوم مجموعه نداریم ومجموعه را به صورت یک لفظ کمکی قابل حذف برای مجموعه‌های متناهی می‌توان به کار برد. مجموعه نامتناهی که اصلا نداریم.

غیر از ابزارهای مورد قبول مکتب شهودگرایی، جهان مجموعه‌های مورد قبول نیز جزو ریاضیات زمینه است. ریاضیات زمینه، هم ابزار و هم معنای ریاضیات ساختارها را فراهم می‌کند. بنابراین، جهان مجموعه‌های ممکن یا جهان افلاطونی مجموعه‌ها، برای داشتن معنا برای ریاضیات ساختارها ضروری است و نمی‌توان از آن صرفنظر کرد.

صدق و اثبات: صادق بودن مفهومی برای گزاره‌هاست. هر گزاره خبری را در باره جهان می‌دهد. گزاره‌های ریاضی خبری را در باره موجودات ریاضی که در ریاضی زمینه قرار دارند می‌دهند. اما، اثبات برای گزاره‌های صوری در نظریه‌های صوری، یا همان ساختارها، است که از طریق مفروضات (که خودشان گزاره‌های صوری دیگری هستند) طبق قواعد استنتاج انجام می‌شود.

گزاره‌های صوری یک نظریهٔ صوری در مدل‌ها به گزاره‌های واقعی تعبیر می‌شوند. رابطهٔ صدق و اثبات به این صورت است که تعبیر گزاره‌های صوری اثبات شده، در مدل‌های نظریه، گزاره‌هایی صادق خواهند بود.

صدق، ویژگی مستقیم خود گزاره است، اما اثبات مربوط به گزاره‌های صوری است و رابطهٔ منطقی آن با چند گزارهٔ صوری دیگر است.

سوال: در یک نظریهٔ صوری، اگر تعبیر یک گزارهٔ صوری، در یک مدل از آن صادق باشد، آیا در آن نظریهٔ قابل اثبات است؟

ممکن است برخی نظریه‌های صوری آنقدر قوی باشند که هر گزارهٔ صوری در آن خودش یا نقیضش قابل اثبات باشند. اینگونه نظریه‌ها را کامل می‌نامند. در نظریه‌های کامل، اگر تعبیر یک گزاره صوری در یکی از مدل‌های آن صادق باشد، در نظریه صوری قابل اثبات

خواهد بود. در نظریه‌های کامل قابل اثبات بودن گزارهٔ صوری و صادق بودن تعبیر آن گزارهٔ صوری معادل یکدیگر می‌شوند.

سوال: آیا نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها کامل است؟

یکی از قضایای مهم گودل می‌گوید نظریه‌های اصل موضوعی به اندازهٔ کافی قوی نمی‌توانند کامل باشند.

نکته ۱) منظور از به اندازهٔ کافی قوی بودن یک نظریهٔ اصل موضوعی، آن است که نظریه اعداد طبیعی و اصول پئانو را در خود داشته باشد که نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها این ویژگی را دارد.

نکته ۲) منظور از اصل موضوعی در قضیه گودل آن است که اصول موضوعه به طور آلگوریتمیک قابل تشخیص باشند. هر نظریهٔ قابل قبولی باید این ویژگی را داشته باشد زیرا اگر نتوانیم اصول موضوعه را با یک روش کارآمد تشخیص دهیم مانند آن است که اصلا اصول موضوعه را نمی‌شناسیم. نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها این ویژگی را دارد.

نتیجه: نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها کامل نیست و به هر میزان هم که به آن با یک روش آلگوریتمیک اصل اضافه کنیم باز هم کامل نخواهد شد.

نتیجه: حقایق بسیاری در بارهٔ مجموعه‌ها وجود دارد که ما از آنها اطلاعی نداریم و به آنها دسترسی هم نداریم.

جهان مجموعه‌ها بسیار وسیع است و تعجبی ندارد که ما نتوانیم همهٔ حقایق مربوط به آنها را بشناسیم، اما در مورد ساده‌ترین موجودات ریاضی که اعداد طبیعی باشند نیز وضعیت از همین قرار است.

نظریهٔ اصل موضوعی اعداد طبیعی که اصول موضوعهٔ پئانو را برای آن در نظر می‌گیریم، طبق قضیهٔ ناتمامیت گودل، کامل نیست. یعنی حقایقی در اعداد طبیعی داریم که با اصول پئانو قابل اثبات نیست.

سوال: چه حقایقی را در بارهٔ اعداد طبیعی می‌توانیم به دست آوریم که از طریق اصول موضوعهٔ پئانو به دست نیامده باشد؟

نکتهٔ مهم: همهٔ آنچه که ما می‌دانیم در قالب گزاره‌های صوری نظریه‌های اصل موضوعی قابل بیان نیست. بنابراین تعجبی ندارد که نظریه‌های اصل موضوعی نتوانند همهٔ دانش ما را بیان کنند.

اینکه همهٔ اعداد طبیعی در سلسلهٔ ۱و۲و۳و ..... قرار دارند یک حقیقت مشخص و قابل درک برای ما است و از این موضوع در استدلاهای خود استفاده می‌کنیم. اما این واقعیت در قالب گزاره‌های صوری و حتی بینهایت اصل موضوع قابل بیان نیست. بنابراین می-توانیم حقایقی در بارهٔ اعداد طبیعی بیابیم که در زبان صوری نظریهٔ اصل موضوعهٔ اعداد طبیعی قابل اثبات نباشد.